第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-0985-05

具有多时滞和广义扩散的 N-种群竞争反馈控制系统的持久性*

王爱丽[1]， 薛秋芳[2]

(1- 宝鸡文理学院数学系，宝鸡 721013； 2- 西安理工大学理学院，西安 710048)

摘 要: 本文讨论了一类具有 α_i 类功能性反应函数和广义扩散的 n 种群竞争反馈控制生态系统的持续生存性。利用比较原理，得到了系统的所有正解最终有界的条件。通过构造持久生存函数，给出了系统一致持久生存的充分条件，并导出了系统的持久生存域。最后，通过建立具体模型说明所得结果的可实现性。研究结果表明，时滞不影响系统的持续生存性，通过适当控制扩散率，可使系统中的各个种群长期共存。

关键词: 反馈控制；持久生存；扩散；α_i 类功能性反应函数

分类号: **AMS**(2000) 34B37; 34K10 **中图分类号**: O175.7 **文献标识码**: A

1 模型与假设

时滞生态系统和具有反馈控制的种群动力系统的研究已有许多成果，如见文 [1,2]。文 [3] 通过上、下确界平均函数的引入讨论了具有反馈控制的 n 种群 Lotka-Volterra 竞争系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i(t)\big[b_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) - d_i(t)u_i(t)\big], \\ \dot{u}_i = r_i(t) - e_i(t)u_i(t) + f_i(t)x_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

的全局渐近稳定性。关于有扩散率的竞争模型，也已有许多结果，可参见文 [4]。本文结合文 [3] 与文 [4] 的结果，讨论一类具有 α_i 类功能性反应函数的反馈控制生态系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i(t)\big[b_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i(t-\tau_{ij}) - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{m_{ij}(t)x_i^{\alpha_j-1}(t-\rho_{ij})x_j(t-\rho_{ij})}{1+c_{ij}(t)x_i^{\alpha_j}(t-\rho_{ij})} - d_i(t)u_i(t)\big] \\ \qquad + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} D_{ij}(t)f_{ij}(x_i, x_j) \\ \dot{u}_i = r_i(t) - e_i(t)u_i(t) + h_i(t)x_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1}$$

的持久生存性。假定系统 (1) 的各系数均为连续正函数，τ_{ij}, ρ_{ij} 均是非负常数。

记 $f^u = \sup\{f(t)|0 \le t < +\infty\}$，$f^l = \inf\{f(t)|0 \le t < +\infty\}$。对系统 (1)，假定

(H_1) $\min\{b_i^l, a_{ij}^l, m_{ij}^l, c_{ij}^l, d_i^l, D_{ij}^l, r_i^l, e_i^l, h_i^l\} > 0$, $\max\{b_i^u, a_{ij}^u, m_{ij}^u, c_{ij}^u, d_i^u, D_{ij}^u, r_i^u, e_i^u, h_i^u\} < +\infty$；

(H_2) $f_{ij}(x_i, x_j)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且满足如下条件

收稿日期: 2007-12-17. **作者简介**: 王爱丽 (1978年7月生)，女，硕士，讲师. 研究方向：生态数学与反应扩散方程.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10701001)；宝鸡文理学院重点科研基金 (ZK0813).

(a) 当 $x_i > x_j$ 时，$f_{ij}(x_i,x_j) < 0$, $f_{ji}(x_j,x_i) > 0$, $i \neq j$;

(b) $|f_{ij}(u_i,u_j) - f_{ij}(\bar{u}_i,\bar{u}_j)| \leq L_{ij}(|u_i-\bar{u}_i| + |u_j - \bar{u}_j|)$，其中 L_{ij} 为常数，$i \neq j$。

记 $\tau = \max\{\tau_{ij},\ \rho_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)\}$，本文假定系统 (1) 的初始条件为

$$x_i(t_0) = x_{i0} > 0, \quad u_i(t_0) = u_{i0} > 0, \quad t > t_0. \tag{2}$$

2 主要结论

定理1 若条件 (H_1)、(H_2) 满足，则存在 $T > 0$，当 $t \geq T$ 时，$x_i(t) \leq M_1$, $u_i(t) \leq M_2$, $u_i(t) \geq m_2$, $i = 1,2,\cdots,n$，其中 $M_1 > M_1^*$, $M_2 > M_2^*$, $0 < m_2 < m_2^*$ 且

$$M_1^* = \max_{1\leq i,j\leq n}\left\{\frac{b_i^u}{a_{ij}^l}\exp(b_i^u\tau_{ij})\right\}, \quad m_2^* = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{r_i^l}{e_i^u}\right\}, \quad M_2^* = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{r_i^u + h_i^u M_1^*}{e_i^l}\right\}.$$

证明　对于 (1) 的正解，我们有

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &\leq x_i(t)\Big[b_i^u - \sum_{j=1}^n a_{ij}^l x_i(t-\tau_{ij})\Big] + \sum_{j=1,j\neq i}^n D_{ij}(t) f_{ij}(x_i,x_j)\\ &\leq x_i(t)\big[b_i^u - a_{ij}^l\exp(-b_i^u\tau_{ij})x_i(t)\big]_{x_i=M_1} < 0.\end{aligned}$$

因此存在 $T_1 > 0$，当 $t > T_1$ 时，$G(t) < M_1$。故当 $t > T_1$ 时，$x_i(t) \leq M_1$。

由系统 (1) 可知 $\dot{u}_i \leq r_i^u - e_i^l u_i(t) + h_i^u M_1^*$, $i = 1,2,\cdots,n$。由比较原理可知，存在 $T_2 > T_1$，当 $t \geq T_2$ 时 $u_i(t) \leq M_2$。

同理，由系统 (1) 可得 $\dot{u}_i \geq r_i^l - e_i^u u_i(t) + h_i^l x_i(t) \geq r_i^l - e_i^u u_i(t)$, $i = 1,2,\cdots,n$。则由比较原理可知，存在 $T_3 > T_2$，当 $t \geq T_3$ 时，$u_i(t) \geq m_2$。

综上所述，当 $t \geq T_3$ 时，$x_i(t) \leq M_1$, $m_2 \leq u_i(t) \leq M_2$, $i = 1,2,\cdots,n$。由此知，系统 (1) 满足任一初值条件 (2) 的解是最终有界的。 **证毕**

在本文下面的讨论中，我们引入以下记号

$$\gamma_k = \min_{1\leq i\leq n, i\neq k}\Big\{\sum_{j=1}^n a_{ij}^l\Big\}, \quad \beta_{kj} = \frac{m_{kj}^u}{\alpha_j}\Big(\frac{\alpha_j - 1}{c_{kj}^l}\Big)^{\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}, \quad k \neq j,$$

$$\begin{aligned}\eta_k^l = {}&\gamma_k b_k^l + \sum_{j=1,j\neq k}^n \beta_{kj} d_j^l m_2 - \gamma_k d_k^u M_2 - \sum_{j=1,j\neq k}^n \beta_{kj} b_j^u\\ &- \gamma_k \sum_{j=1,j\neq k}^n D_{kj}^u L_{kj} - \sum_{j=1,j\neq k}^n \beta_{kj} \sum_{i=1,i\neq j}^n D_{ji}^u L_{ji},\end{aligned}$$

$$\xi_j = \gamma_j - \sum_{k=1,k\neq j}^n \beta_{kj}, \quad k,j = 1,2,\cdots,n.$$

定理2 若系统 (1) 满足条件 (H_1), (H_2) 及下列条件

(H_3) $\eta_k^l > 0$, $\xi_j > 0$, $k,j = 1,2,\cdots,n$，则系统 (1) 是一致持久生存的。

证明　设 $(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),\cdots,u_n(t))$ 是系统 (1) 的任一解，令

$$V_1(t) = (x_1(t))^{\gamma_1}\prod_{j=2}^n (x_j(t))^{-\beta_{1j}}\exp(g_1(t)),$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_1(t) \;=\; & -\gamma_1\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{u}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_1(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=2}^{n}m_{1j}^{u}\int_{t-\rho_{ij}}^{t}\frac{x_1^{\alpha_j-1}(s)x_j(s)}{1+c_{1j}(s+\rho_{1j})x_1^{\alpha_j}(s)}\mathrm{d}s\Big]\\
&+\sum_{i=2}^{n}\beta_{1i}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{l}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}m_{ij}^{l}\int_{t-\rho_{ij}}^{t}\frac{x_i^{\alpha_j-1}(s)x_j(s)}{1+c_{ij}(s+\rho_{ij})x_i^{\alpha_j}(s)}\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

当 $t\geq T_3$ 时，沿系统 (1) 计算 $V_1(t)$ 的导数可得

$$
\dot V_1(t)\geq V_1(t)\Big[\eta_1^{l}-\gamma_1\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^{u}x_1(t)\Big].
$$

类似地，令

$$
V_k(t)=(x_k(t))^{\gamma_k}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_j(t))^{-\beta_{kj}}\ \exp(g_k(t)),\quad k=2,\cdots,n,
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
g_k(t) \;=\; & -\gamma_k\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^{u}\int_{t-\tau_{kj}}^{t}x_k(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1,j\neq k}^{n}m_{kj}^{u}\int_{t-\rho_{kj}}^{t}\frac{x_k^{\alpha_j-1}(s)x_j(s)}{1+c_{kj}(s+\rho_{kj})x_k^{\alpha_j}(s)}\mathrm{d}s\Big]\\
&+\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\beta_{ki}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{l}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}m_{ij}^{l}\int_{t-\rho_{ij}}^{t}\frac{x_i^{\alpha_j-1}(s)x_j(s)}{1+c_{ij}(s+\rho_{ij})x_i^{\alpha_j}(s)}\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

沿系统 (1) 计算 $V_k(t)$ 的导数可知

$$
\dot V_k\geq V_k(t)\Big[\eta_k^{l}-\gamma_k\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^{u}x_k(t)\Big].
$$

取

$$
0<h_k<\frac{1}{2}\min\Big\{M_1,\ \frac{\eta_k^{l}}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}^{u}\cdot\gamma_k}\Big\},
$$

则当 $0<x_k\leq h_k$ 时，有如下结果

$$
\dot V_k\geq V_k(t)\Big[\eta_k^{l}-\gamma_k\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^{u}x_k(t)\Big]\geq\frac{\eta_k^{l}}{2}V_k(t),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{3}
$$

以下记

$$
\triangle_k=\exp\Big\{\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\beta_{ki}\Big[M_1\tau\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{l}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}m_{ij}^{l}M_1\tau\frac{1}{\alpha_j}\Big(\frac{\alpha_j-1}{c_{ij}^{l}}\Big)^{\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}\Big]\Big\},
$$

$$
\delta_k=\exp\Big\{-\gamma_kM_1\tau\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^{u}-\gamma_kM_1\tau\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\frac{m_{kj}^{u}}{\alpha_j}\Big(\frac{\alpha_j-1}{c_{kj}^{l}}\Big)^{\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}\Big\},\quad k=1,2,\cdots,n.
$$

则有如下结果

$$\delta_k(x_k(t))^{\gamma_k}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_j(t))^{-\beta_{kj}}$$
$$\leq\ V_k(t)\leq\Delta_k(x_k(t))^{\gamma_k}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_j(t))^{-\beta_{kj}},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

以下在区域$\{X^n\,|\,X^n=(x_1,\cdots,x_n),\ x_j\leq M_1,\ j=1,2,\cdots,n\}$上构造持久生存函数，令

$$\pi_k:x_k^{\gamma_k}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_j)^{-\beta_{kj}}=\frac{\delta_k}{\Delta_k}(\lambda_k h_k)^{\gamma_k}M_1^{-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\beta_{kj}},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中λ_k为充分小的正数。下面证明由π_k，$x_k=M_1$，$u_k=M_2$，$u_k=m_2$ $(k=1,2,\cdots,n)$所围成的区域D便是系统(1)的一致持久生存域。

(i) 存在$t_1>T_3$，使得$x_1(t_1)>h_1$，否则，若对任意$t>T_3$，$x_1(t)\leq h_1$，则由(3)式有

$$\lim_{t\to+\infty}V_1(t)=+\infty,$$

这意味着至少存在一个$1<j\leq n$，使得$\lim\limits_{t\to+\infty}x_j(t)=0$。无妨设$\lim\limits_{t\to+\infty}x_2(t)=0$，则有以下结论：

(a) 存在$t_1'>T_3$，使得$t>t_1'$时，$x_2(t_1')<\frac{h_2}{2}$。由(3)式有，$\lim\limits_{t\to\infty}V_2(t)=+\infty$。

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty}V_k(t)=+\infty$，$k=3,4,\cdots,n$。这与$\prod_{k=1}^{n}V_k(t)$为有限值矛盾。

类似可证存在$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_2>t_1>T_3$，使得$x_k(t_k)>h_k$，$k=1,2,\cdots,n$。

(ii) 当$t>t_1$时，$X(t)$位于π_1的右上侧。否则，若存在$\bar{t}_1>t_1$，使得

$$(x_1(\bar{t}_1))^{\gamma_1}\prod_{j=2}^{n}(x_j(\bar{t}_1))^{-\beta_{1j}}\leq\frac{\delta_1}{\Delta_1}(\lambda_1h_1)^{\gamma_1}\prod_{j=2}^{n}M_1^{-\beta_{1j}}, \tag{5}$$

当$t_1<t<\bar{t}_1$时，

$$(x_1(t))^{\gamma_1}\prod_{j=2}^{n}(x_j(t))^{-\beta_{1j}}>\frac{\delta_1}{\Delta_1}(\lambda_1h_1)^{\gamma_1}\prod_{j=2}^{n}M_1^{-\beta_{1j}}.$$

则由(5)式知，$x_1(\bar{t}_1)<h_1$，从而存在$t_1<\underline{t}_1<\bar{t}_1$，使得$x_1(\underline{t}_1)=h_1$。由(4)式与(5)式，有$V_1(\bar{t}_1)\leq V_1(\underline{t}_1)$。这与(3)矛盾。

同理可证，当$t>t_k$时，$X(t)$位于π_k的右上侧，$k=1,2,\cdots,n$。

由以上分析可知，当$t>t_n$时，$X(t)$位于区域D内并且保持在区域D内。 **证毕**

例1 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) = x_1(t)\Big[&8 + \frac{1}{8}\sin t - \Big(2 - \frac{1}{8}\cos t\Big)x_1\Big(t - \frac{1}{7}\Big) - \Big(2 + \frac{1}{8}\cos t\Big)x_1\Big(t - \frac{1}{8}\Big) \\
&- \frac{(1 + \frac{1}{8}\sin t)x_1(t - \frac{1}{8})x_2(t - \frac{1}{10})}{1 + (1 + \frac{1}{8}\cos t)x_1^2(t - \frac{1}{10})} - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\sin t\Big)u_1(t)\Big] \\
&+ \Big(\frac{1}{27} - \frac{1}{27}\cos t\Big)(x_2(t) - x_1(t)), \\
\dot{x}_2(t) = x_2(t)\Big[&8 - \frac{1}{8}\cos t - \Big(6 + \frac{1}{8}\cos t\Big)x_2\Big(t - \frac{1}{9}\Big) - \Big(6 - \frac{1}{8}\cos t\Big)x_2\Big(t - \frac{3}{20}\Big) \\
&- \frac{(1 - \frac{1}{8}\cos t)x_1(t - \frac{3}{11})}{1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sin t)x_2(t - \frac{3}{11})} - \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{15}\cos t\Big)u_2(t)\Big] + \Big(\frac{1}{81} + \frac{1}{81}\sin t\Big)(x_1(t) - x_2(t)), \\
\dot{u}_1(t) = 1 &+ \frac{1}{9}\cos t - \Big(1 - \frac{1}{11}\sin t\Big)u_1(t) + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\cos t\Big)x_1(t), \\
\dot{u}_2(t) = \frac{3}{2} &- \frac{1}{10}\sin t - \Big(1 + \frac{1}{11}\cos t\Big)u_2(t) + \Big(\frac{3}{8} - \frac{1}{16}\sin t\Big)x_2(t).
\end{aligned}
$$

可以验证例1满足定理1与定理2的条件：$(H_1) \sim (H_3)$。因此，根据定理2知，该系统是一致持久生存的。

参考文献：

[1] Tian D S, Li Z Q. Persistence and periodic solution for a dalayed nonautonomous Schoner model with feedback control[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(2): 343-352

[2] 田亚品，陈斯养. N-种群Lotka-Volterra扩散竞争反馈控制生态系统的持久性和全局渐近性[J]. 应用数学，2007, 20(3): 485-490

[3] Chen F D. The permanence and global attractivity of Lotka-Volterra system with feed-back controls[J]. Nonlinear Analysis: Real World Appl, 2006, 7: 133-143

[4] Cui J A, Chen L S. Permanence and extinction in logistic and Lotka-Volterra systems with diffusion[J]. Math Anal Appl, 2001, 258: 512-535

Persistence of the N-Species Lotka-Volterra Delayed Competition System with Feedback Controls and Generalized Diffusions

WANG Ai-li[1], XUE Qiu-fang[2]

(1- Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013;
2- Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

Abstract: Investigated in this paper is the uniform persistence for a class of n-species Lotka-Volterra competition systems with feedback controls, generalized diffusions and the α_i-kind functional response. It is shown that all the positive solutions of the system are ultimately bounded. The sufficient conditions for the uniform persistence are established by constructing a persistence function. Meanwhile, the uniform persistent region of the system is derived. At last, the feasibility of the assumptions in the theorems is illustrated by an example. Our results show that the delays don't affect the persistence of the system, and by suitably controlling the diffusion, all the species in the system will be persistent.

Keywords: feedback control; persistence; diffusion; α_i-kind of functional response